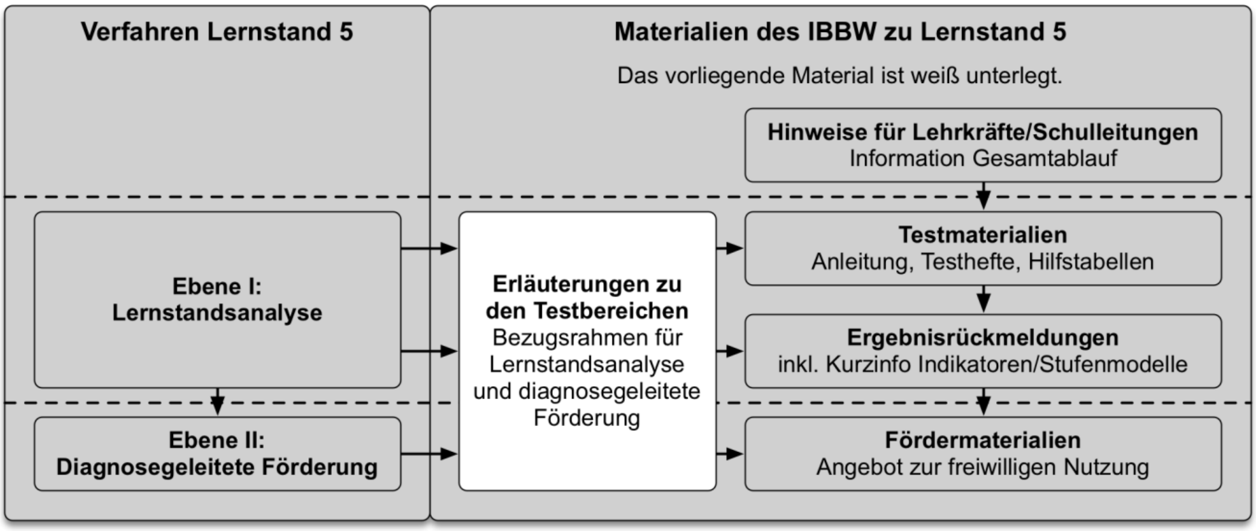
Mathematik

Erläuterungen zu Testbereichen und Stufenmodellen



Inhaltsverzeichnis

1 Einführung: Basiskompetenz Zahlen und Operationen 2
2 Schriftliche Rechenverfahren 2
3 Operationsverständnis 4
4 Zahlverständnis 11
5 Literatur 16

1 Einführung: Basiskompetenz Zahlen und Operationen

Im Fokus von Lernstand 5 im Fach Mathematik steht der Kompetenzbereich „Zahlen und Operationen" der KMK-Bildungsstandards für die Primarstufe (KMK, 2005). Arithmetische Basiskompetenzen, beispielsweise ein tragfähiges Verständnis von Rechenoperationen, Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen, bilden eine wichtige Voraussetzung für das Erlernen weiterführender mathematischer Inhalte in der Sekundarstufe (z. B. Moser Opitz, 2013). Fehlen arithmetische Basiskompetenzen, so stellt dies eine Hürde für das Weiterlernen im Fach Mathematik dar (z. B. Humbach, 2008). Bei Lernstand 5 werden drei zentrale arithmetische Basiskompetenzen überprüft: die schriftlichen Rechenverfahren, das Operationsverständnis und das Zahlverständnis.

Im Testbereich Schriftliche Rechenverfahren wird hierbei in Form eines *Indikators* rückgemeldet, ob Schülerinnen und Schüler bei der Anwendung der schriftlichen Verfahren bereits hinreichend sicher sind bzw. ob noch Unsicherheiten beim schriftlichen Rechnen bestehen.

In den beiden Testbereichen Operationsverständnis und Zahlverständnis werden die Ergebnisse der Lernstandsanalyse anhand von *Stufenmodellen* dargestellt. Diese Stufenmodelle basieren auf den KMK-Bildungsstandards im Kompetenzbereich Zahlen und Operationen und wurden im Rahmen von Lernstand 5 unter der Beteiligung von Fachdidaktikexperten, Lehrkräften und Testtheoretikern entwickelt. Die Stufenmodelle beschreiben den Lernstand von Schülerinnen und Schülern inhaltlich detailliert in aufeinander aufbauenden Lernstandsstufen, die durch Aufgaben mit unterschiedlichen Schwierigkeitsanforderungen erfasst werden. Kompetentere Schülerinnen und Schüler lösen schwierigere Aufgaben mit höherer Wahrscheinlichkeit und erreichen somit einen höheren Testwert, weshalb ihnen eine höhere Lernstandsstufe zugeordnet wird. Die quantitativen Testwerte lassen sich mithilfe des jeweiligen Stufenmodells qualitativ einordnen. Die Stufenbeschreibungen bilden dabei jeweils die zentralen Kompetenzen ab, über die die Schülerinnen und Schüler bereits verfügen sollten, um die für die jeweilige Stufe charakteristischen Testaufgaben richtig zu lösen. Ausgehend von den Ergebnisrückmeldungen lässt sich schließlich ein passgenaues individuelles Förderangebot ableiten (Schulz, Leuders & Rangel, 2017).

Nachfolgend werden die drei Testbereiche von Lernstand 5 im Fach Mathematik näher beschrieben und Hinweise zur Interpretation der Ergebnisrückmeldung gegeben.

2 Schriftliche Rechenverfahren

„Schriftliche Rechenverfahren sind Algorithmen, die sich der Stellenwertstruktur und mathematischer Verknüpfungsgesetze (Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz) bedienen" (Schulz & Leuders, 2014, S. 1115). Auf Basis einer fest vorgegebenen Abfolge von Rechenschritten werden die zu verrechnenden Zahlen nicht mehr als Ganzes, sondern zerlegt in ihre einzelnen Ziffern verarbeitet. Insbesondere beim Rechnen mit großen Zahlen sparen schriftliche Verfahren damit kognitive Ressourcen, vereinfachen das Rechnen und vermitteln Rechensicherheit. Darüber hinaus ermöglichen sie einen Einblick in die Bedeutung von Algorithmen als eine zentrale Leitidee in der Mathematik (Padberg & Benz, 2011).

Der Indikator *Schriftliche Rechenverfahren* bei Lernstand 5 erfasst anhand von vier exemplarischen Aufgaben pro Verfahren, ob Schülerinnen und Schüler sicher schriftlich subtrahieren, multiplizieren und dividieren können. Die schriftliche Addition wird nicht getestet, da aufgrund von Voruntersuchungen davon auszugehen ist, dass nur ein sehr geringer Anteil von Schülerinnen und Schülern am Ende der Grundschule hier Unsicherheiten aufweist.

Die Anforderungen der eingesetzten Aufgaben werden hierbei gezielt stufenweise variiert, um bei Unsicherheiten von Schülerinnen und Schülern Ansätze für eine anschließende Fehleranalyse zu bieten. In wissenschaftlichen Untersuchungen hat sich gezeigt, dass die Schwierigkeit einer schriftlichen Rechenaufgabe – unabhängig vom Verfahren – vorrangig davon bestimmt wird, wie viele Ziffern beim Rechnen gleichzeitig im Blick behalten werden müssen. So können beim Verrechnen einmalig oder wiederholt Überträge, Behaltensziffern bzw. Reste entstehen, die beim nächsten Rechenschritt berücksichtigt werden müssen. Hierdurch steigen die kognitiven Anforderungen beim Rechnen. Bei Lernstand 5 werden daher Aufgaben auf drei ansteigenden Schwierigkeitsstufen eingesetzt:

Schwierigkeitsstufe 1 : Einstellige Prozedur. Die Aufgabe ist durch reines ziffernweises Rechnen lösbar, die Berücksichtigung von Überträgen (Subtraktion), Behaltensziffern (Multiplikation) oder Teilquotientenbildungen mit Rest (Division) ist nicht erforderlich.

Schwierigkeitsstufe 2: Einschrittig-mehrstellige Prozedur. An einer Stelle der Aufgabe wird ein Übertrag (Subtraktion), eine Behaltensziffer (Multiplikation) oder eine Teilquotientenbildung mit Rest (Division) produziert. Diese Schwierigkeit löst sich jedoch beim nächsten Rechenschritt auf.

Schwierigkeitsstufe 3: Mehrschrittig-mehrstellige Prozedur. Überträge (Subtraktion), Behaltensziffern (Multiplikation) oder Teilquotientenbildungen mit Rest (Division) lösen sich nicht auf, sondern treffen im nächsten Rechenschritt auf eine nachfolgende Schwierigkeit (z. B. Übertrag auf 0, 9 oder leere Stelle bzw. erneuter Übertrag, Behaltensziffer trifft auf 0 bzw. erneute Behaltensziffer, Notation einer stellenwertbelegenden 0 bzw. fortgesetzte Teilquotientenbildung mit Rest). Für jedes Verfahren werden jeweils eine Aufgabe auf den Schwierigkeitsstufen 1 und 2 sowie zwei Aufgaben auf Schwierigkeitsstufe 3 eingesetzt. Eine genaue Beschreibung aller Aufgabenmerkmale der eingesetzten Aufgaben pro Verfahren finden Sie im Abschnitt 4 der „Anleitung zur Durchführung und Auswertung“.

Hinweise zur Interpretation der Ergebnisrückmeldung: Indikator Schriftliche Rechenverfahren

Die Ergebnisse im Testbereich Schriftliche Rechenverfahren sind ein Indikator dafür, wie sicher Schülerinnen und Schüler bei der Anwendung der schriftlichen Verfahren sind. Die Anwendung eines Verfahrens wird dann als sicher betrachtet (Symbol „Haken“), wenn eine Schülerin bzw. ein Schüler mindestens drei der vier Aufgaben pro Rechenverfahren richtig gelöst hat. Hierdurch ist sichergestellt, dass auch mindestens eine der beiden Aufgaben auf der höchsten Schwierigkeitsstufe richtig gelöst wurde. Werden hingegen lediglich die Hälfte oder weniger der vier Aufgaben pro Verfahren gelöst, kann aufgrund der Testergebnisse nicht mehr davon ausgegangen werden, dass das Verfahren sicher angewendet wird (Symbol „Lupe“).

Bei der Interpretation der Ergebnisse muss beachtet werden, dass Unsicherheiten bei der Anwendung eines schriftlichen Rechenverfahrens nicht zwangsläufig auf tiefer gehende Verständnisprobleme oder systematische Fehler hindeuten. Vielmehr ist davon auszugehen, dass manchen Schülerinnen und Schülern zu Beginn der Klasse 5 das Vorgehen bei einem schriftlichen Rechenverfahren nicht mehr präsent ist, jedoch nach einer wiederholenden Erläuterung korrekt eingesetzt werden kann. In Bezug auf die Weiterarbeit mit den Ergebnissen wird daher ein zweistufiges Verfahren vorgeschlagen: Bei Unsicherheiten sollte zunächst das Verfahren noch einmal in Erinnerung gerufen werden, bevor gegebenenfalls über weitere Unterstützungsmaßnahmen entschieden wird.

Die folgende Übersicht, die sich auch in den Ergebnisrückmeldungen wiederfindet, fasst die Hinweise zur Interpretation der Ergebnisse der Schriftlichen Rechenverfahren zusammen:

Lernstand	Förderhinweis
Das schriftliche Rechenverfahren wird unsicher oder nur teilweise sicher angewendet.	In einem ersten Schritt sollte geprüft werden, ob die Sicherheit beim schriftlichen Rechnen wieder hergestellt werden kann, indem das Verfahren erneut in Erinnerung gerufen wird. Um bei weiterhin bestehenden Unsicherheiten fokussierte Fördermaßnahmen anzuschließen, können die bei einzelnen Schülerinnen und Schülern auftretenden Fehlerarten tiefergehend analysiert und so individuelle Ursachen von möglicherweise grundlegenden Schwierigkeiten identifiziert werden. Hierzu können Fehler in den Schülerlösungen mithilfe der aufgeführten Aufgabenmerkmale (s. „Anleitung zur Durchführung und Auswertung“, Abschnitt 4) genauer untersucht werden. Zur vertiefenden Diagnose und Förderung siehe beispielsweise Gerster (2012), Schulz & Leuders (2015) sowie Selter, Prediger, Nührenbörger & Hußmann (2014).
Das schriftliche Rechenverfahren wird sicher angewendet.	Weitergehende Fördermaßnahmen zur Erhöhung der Sicherheit im schriftlichen Rechnen sind nicht erforderlich. Produktive Übungsformen (Weiterlern- und Transfermöglichkeiten schaffen) können jedoch dazu genutzt werden, um das Verständnis und die Anwendung der schriftlichen Rechenverfahren weiter zu vertiefen, siehe beispielsweise Padberg & Benz (2011) Radatz, Schipper, Dröge & Ebeling (1999), Schipper, Dröge & Ebeling (2000) sowie Wittmann & Müller (1999). Auch eine Untersuchung von Mustern und Strukturen kann mithilfe schriftlicher Rechenverfahren geschehen. Dabei lassen sich schriftliche Rechenverfahren üben und festigen sowie weitergehend mathematische Zusammenhänge entdecken, siehe beispielsweise die Projekte KIRA[1] oder PIKAS[2].

3 Operationsverständnis

Als *Operationsverständnis* wird bei Lernstand 5 die Fähigkeit von Schülerinnen und Schülern bezeichnet, Situationen (d. h. Beschreibungen, Handlungen, Bilder, Texte) in passende Rechenoperationen zu übersetzen und umgekehrt zu Operationen passende Situationen zu finden. Das Verständnis für die Bedeutung von

[1] http://kira.dzlm.de/131

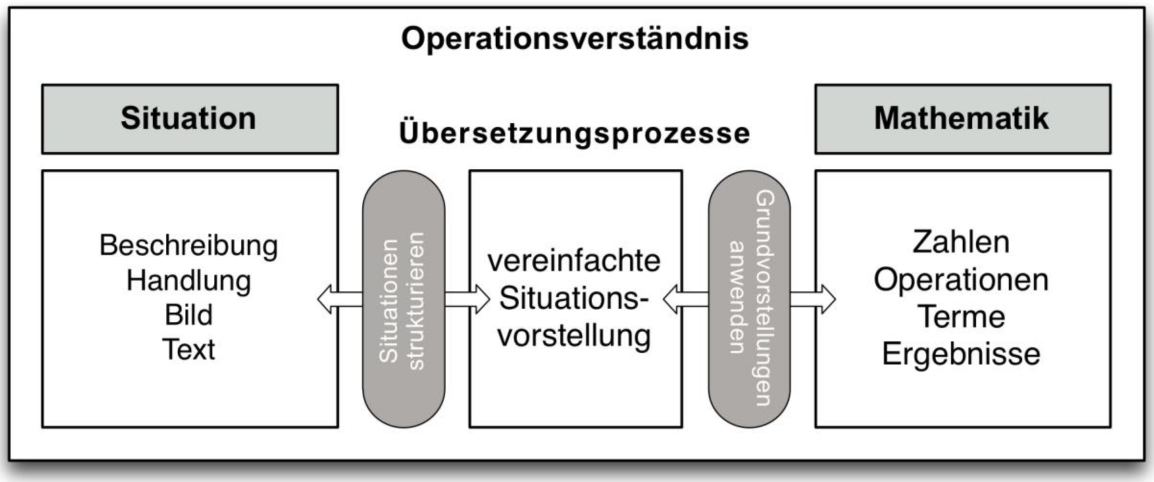
[2] http://pikas.dzlm.de/material-pik/herausfordernde-lernangebote/haus-7-unterrichts-material/umkehrzahlen/umkehrzahlen.html, dort „Schülermaterial“

Operationen zeigt sich also nicht in einem fehlerfreien Anwenden von Rechenverfahren[3], sondern darin, dass Schülerinnen und Schüler wissen, in welcher Situation welche Operation angemessen ist.

Bei einer solchen Übersetzung von Situationen in Operationen greifen Schülerinnen und Schüler auf so genannte *Grundvorstellungen* zurück, d. h. intuitive inhaltliche Vorstellungen, die von den Schülerinnen und Schülern gedanklich mit mathematischen Operationen in Verbindung gebracht werden. So ist beispielsweise die Operation „+“ mit Vorstellungen des Zusammenfügens und des Hinzufügens verbunden. Die Operation „–“ wird hingegen beispielsweise mit Grundvorstellungen des Wegnehmens und des Ergänzens in Verbindung gebracht.

Bei komplexeren Situationen – beispielsweise, wenn die Beziehungen zwischen den gegebenen Zahlen nicht unmittelbar erkennbar sind oder bestimmte enthaltene Informationen zunächst als irrelevant erkannt werden müssen – können Schülerinnen und Schüler nicht direkt eine Grundvorstellung anwenden, sondern müssen zunächst die vorliegende *Situation strukturieren* und in eine vereinfachte Situationsvorstellung übersetzen.

Die nachfolgende Grafik verdeutlicht noch einmal die Rolle der beiden Übersetzungsprozesse „Situation strukturieren“ und „Grundvorstellung anwenden“ beim Operationsverständnis.



Hinweise zur Interpretation der Ergebnisrückmeldung: Lernstandsstufen Operationsverständnis

Lernstand 5 erfasst das Operationsverständnis der Schülerinnen und Schüler auf drei Lernstandsstufen. Aufgrund des unterschiedlichen Förderbedarfs wird die untere Stufe hierbei zusätzlich in Stufe 1a und 1b ausdifferenziert. Die Lernstandsstufen zum Operationsverständnis werden nachfolgend näher erläutert.

Hierbei gilt es zu berücksichtigen, dass die Stufenbeschreibungen jeweils die charakteristischen Merkmale dieser Stufe hervorheben, es sich hierbei jedoch um keine umfassende Zusammenstellung aller Kompetenzen auf der Stufe handeln kann.

[3] Die technische Komplexität der reinen Rechenschritte der Aufgaben zur Erfassung des Operationsverständnisses wurde aus diesem Grund bewusst konstant niedrig gehalten. Zur Messung der korrekten Anwendung schriftlicher Rechenverfahren wird bei Lernstand 5 der Testbereich Schriftliche Rechenverfahren verwendet.

Schülerinnen und Schüler, die einer bestimmten Stufe zugeordnet werden, befinden sich auf dem Weg zur Erreichung der stufenspezifischen Kompetenzen, bezüglich mancher Teilaspekte der Stufe sind sie jedoch noch unsicher. Eine anschließende Förderung sollte demnach die Anforderungen der Stufe aufgreifen, auf der die jeweiligen Schülerinnen und Schüler stehen, und so die zugehörigen Kompetenzen festigen und erweitern (s. Spalte „Förderhinweis“). In Bezug auf die beschriebenen Kompetenzen der darunter liegenden Stufen verfügen die Schülerinnen und Schüler hingegen bereits über eine hohe Sicherheit.

Stufe	Lernstand	Förderhinweis
1a	**<u>Einfachste Operationen bei klar strukturierten Situationen verstehen</u>** Schülerinnen und Schüler können auf einfachste Grundvorstellungen zur Addition, Subtraktion und Multiplikation bei der Übersetzung einer klar strukturierten Situation in eine einschrittige Rechenoperation zurückgreifen. Diese Grundvorstellungen beziehen sich auf konkret fassbare Operationen, so dass Realerfahrungen (beispielsweise Hinzufügen oder Wegnehmen von Objekten) genutzt werden können. Die Übersetzung der dargestellten Situation in eine Operation wird häufig durch passende Signalwörter erleichtert, die auf bestimmte Operationen hinweisen (z. B. „zusammen" für die Addition oder „3-mal" für die Multiplikation). Die Situation ist unmittelbar verständlich und muss nicht weitergehend strukturiert werden, so sind die Werte beispielsweise in der Rechenreihenfolge angegeben (z. B. „von fünf drei abgeben" statt „drei von fünf abgeben"). Zur *Addition* werden beispielsweise die Grundvorstellungen des Zusammenfügens zweier gegebener Werte sowie des Hinzufügens eines gegebenen zweiten Werts zu einem Ausgangswert genutzt. Im Bereich der *Subtraktion* gelingt die Nutzung der Grundvorstellung des Wegnehmens eines bestimmten Wertes von einem Ausgangswert. Zur *Multiplikation* werden Grundvorstellungen der schrittweisen Addition oder der räumlichen wiederholten Anordnung eines gegebenen Wertes genutzt. Grundvorstellungen im Bereich der *Division* können auf diesem Niveau noch nicht hinreichend sicher genutzt werden.	Fehlende Grundvorstellungen zur Addition, Subtraktion und Multiplikation können z. B. mithilfe von „Mathe sicher können" aufgebaut werden. Hierbei wird zunächst eine vertiefende Diagnose mithilfe der Standortbestimmungen in „N3A – Ich kann Additions- und Subtraktionsaufgaben zu Situationen finden und umgekehrt" und „N4A – Ich kann Multiplikations-Aufgaben zu Situationen finden und umgekehrt" empfohlen. Die „Mathe sicher können"-Materialien haben sich zur zielgerichteten Förderung in Kleingruppenarbeit bewährt, sind aber auch im Klassenunterricht oder in der Einzelförderung nutzbar (Selter et al., 2014, S. 7).

Stufe	Lernstand	Förderhinweis
1b	**<u>Elementare Operationen verstehen</u>** Schülerinnen und Schüler können auf elementare Grundvorstellungen zu den vier Grundrechenarten bei der Übersetzung einfacher Problemstellungen in einschrittige Rechenoperationen zurückgreifen. Die Situationen beziehen sich dabei nicht nur auf Anzahlen und Größen konkret vorliegender Objekte, sondern zunehmend auf abstrakte Beziehungen zwischen Größen oder Zahlen, z. B. Unterschiede im Gewicht. Signalwörter oder die Reihenfolge der genannten Werte können nicht mehr durchgängig als Hinweis auf passende Operationen genutzt werden. Daher muss vor der Aktivierung einer Grundvorstellung zunehmend eine einfache gedankliche Strukturierung der dargestellten Situation erfolgen. Zur *Addition* und *Subtraktion* werden beispielsweise Grundvorstellungen des Ergänzens genutzt, um Vergleiche zwischen Mengen oder Größen durchzuführen. Bei der *Multiplikation* werden Grundvorstellungen der wiederholten Addition auch in Situationen genutzt, in denen Proportionalitäten zwischen Mengen oder Größen beachtet werden müssen. Zur *Division* werden Grundvorstellungen des Aufteilens bzw. Verteilens einer gegebenen Menge genutzt.	Fehlende Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division können z. B. mithilfe von „Mathe sicher können“ aufgebaut werden. Hierbei wird zunächst eine vertiefende Diagnose mithilfe der Standortbestimmung in „N4A – Ich kann Multiplikations-Aufgaben zu Situationen finden und umgekehrt“ und später mithilfe der Standortbestimmung in „N4B – Ich kann Divisionsaufgaben zu Situationen finden und umgekehrt“ empfohlen. Die „Mathe sicher können“-Materialien haben sich zur zielgerichteten Förderung in Kleingruppenarbeit bewährt, sind aber auch im Klassenunterricht oder in der Einzelförderung nutzbar (Selter et al., 2014, S. 7).
2	**<u>Verknüpfte bzw. mehrschrittige Operationen verstehen</u>** Schülerinnen und Schüler können verschiedene Grundvorstellungen zu den vier Grundrechenarten miteinander verknüpfen, um auch Situationen, die ein mehrschrittiges Vorgehen erfordern, in Rechenoperationen zu übersetzen. Die dargestellte Situation muss stets in einem ersten Schritt gedanklich strukturiert und vereinfacht werden. So müssen die vorgegebenen Zahlen oder Größen zunächst zueinander in Beziehung gesetzt oder relevante von irrelevanter Information getrennt werden. Oberflächliche Informationen wie Signalwörter und die Reihenfolge der vorgegebenen Werte bieten keine Hinweise auf die passende Operation. Zur *Addition*, *Subtraktion* und *Multiplikation* gelingt die Übersetzung von Situationen, bei denen Grundvorstellungen über ein schrittweises Vorgehen miteinander verknüpft werden müssen. Grundvorstellungen zur *Multiplikation* und *Division* werden auch in komplexeren und mehrschrittigen Situationen angewendet. Hierzu gehören auch Situationen mit komplexeren proportionalen Zusammenhängen, die erst geeignet strukturiert werden müssen. Darüber hinaus werden bei der *Division* Situationen bewältigt, die eine Grundvorstellung zum Aufteilen mit Rest benötigen.	Die Sicherheit in der Anwendung und Verknüpfung von Grundvorstellungen sollte weiter ausgebaut werden. Für eine stufenspezifische Förderung im kooperativen Klassenunterricht eignen sich z. B. die Aufgabenstellungen auf Stufe 2 in den Fördermodulen zum Operationsverständnis, die im Online-Portal zur Verfügung stehen.

Stufe	Lernstand	Förderhinweis
3	**<u>Operationen bei komplexen und problemhaltigen Situationen verstehen und flexibel anwenden</u>** Schülerinnen und Schüler können flexibel Grundvorstellungen zu den vier Grundrechenarten aktivieren und miteinander verknüpfen, um Situationen von ausgeprägter Komplexität und Problemhaltigkeit in mehrschrittige Rechenoperationen zu übersetzen. Zur Übersetzung muss hierbei der Lösungsweg jeweils neu konstruiert werden, da die mathematische Struktur der vorliegenden Situationen in der Regel nicht vertraut ist.[4] *Zu allen vier Grundrechenarten* gelingt die Übersetzung von Situationen, die unterschiedliche Grundvorstellungen miteinander verknüpfen. Die Verkettung der einzelnen Rechenschritte ergibt sich hierbei erst über eine gedankliche Konstruktion der Situation und kann nicht durch ein schrittweises Vorgehen gelöst werden.	Das bereits sichere Operationsverständnis kann durch Aufgabenstellungen mit hohem Problemlösegehalt weiterentwickelt und gefördert werden. Für eine stufenspezifische Förderung im kooperativen Klassenunterricht eignen sich z. B. die Aufgabenstellungen auf Stufe 3 in den Fördermodulen zum Operationsverständnis, die im Online-Portal zur Verfügung stehen.

[4] http://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/002

Illustration des Stufenmodells zum Operationsverständnis (Beispiel-Testaufgaben zur Subtraktion)

Die nachfolgende Grafik dient der Illustration zentraler Grundvorstellungen und Anforderungen der Stufen anhand von beispielhaften Testaufgaben zur Subtraktion.

3

Stufe 3:
Operationen bei komplexen und problemhaltigen Situationen verstehen und flexibel anwenden

Lena und Sonja haben zusammen 40 CDs.
Sonja hat 6 CDs mehr als Lena.
Wie viele CDs hat Lena? Schreibe dein Ergebnis auf.

Ergebnis: ____ CDs

Beispiel: Verknüpfungen von Operationen bei problemhaltigen Situationen

- Verknüpfung von Grundvorstellungen in einer Situation von ausgeprägter Komplexität und Problemhaltigkeit
- kein routinemäßiges Verfahren einsetzbar, Lösungsweg muss neu konstruiert werden

2

Stufe 2:
Verknüpfte bzw. mehrschrittige Operationen verstehen

Timo will mit Bauklötzen 10 gleiche 8-er-Türme bauen.
In seiner Kiste sind 62 Bauklötze.
Wie viele Bauklötze fehlen ihm noch? Schreibe dein Ergebnis auf.

Ergebnis: _____ Bauklötze

Beispiel: Verknüpfung Subtraktion/ Multiplikation

- Verknüpfung von Grundvorstellungen zur Multiplikation und Subtraktion über schrittweises Vorgehen
- Gedankliche Strukturierung der vorgegebenen Information notwendig, vorgegebene Zahlen müssen erst zueinander in Beziehung gesetzt werden

1b

Stufe 1b:
Elementare Operationen verstehen

Ralf hat 37 Euro gespart.
Er möchte sich ein Skateboard für 69 Euro kaufen.
Wie viel Euro fehlen ihm noch? Schreibe deine Rechnung auf.

Rechnung: ______________________

Beispiel: Grundvorstellung „Ergänzen“

- Grundvorstellung „Ergänzen“: Subtraktion muss als passende Operation für „Auffüllvorgang“ (Umkehrung zur Addition) verstanden werden
- Darstellung der Zahlen folgt nicht der zu verarbeitenden Reihenfolge, einfache gedankliche Strukturierung muss erfolgen

1a

Stufe 1a:
Einfachste Operationen bei klar strukturierten Situationen verstehen

Luca hat 8 Bonbons. Er gibt 3 davon ab.
Wie viele Bonbons hat er dann noch? Schreibe deine Rechnung auf.

Rechnung: ___________________

Beispiel: Grundvorstellung „Wegnehmen“

- „Wegnehmen“: Nähe zur Realerfahrung (Abgeben von Objekten)
- Darstellung der Zahlen entspricht zu verarbeitender Reihenfolge, Signalwort „abgeben“ erleichtert Auswahl korrekter Grundvorstellung

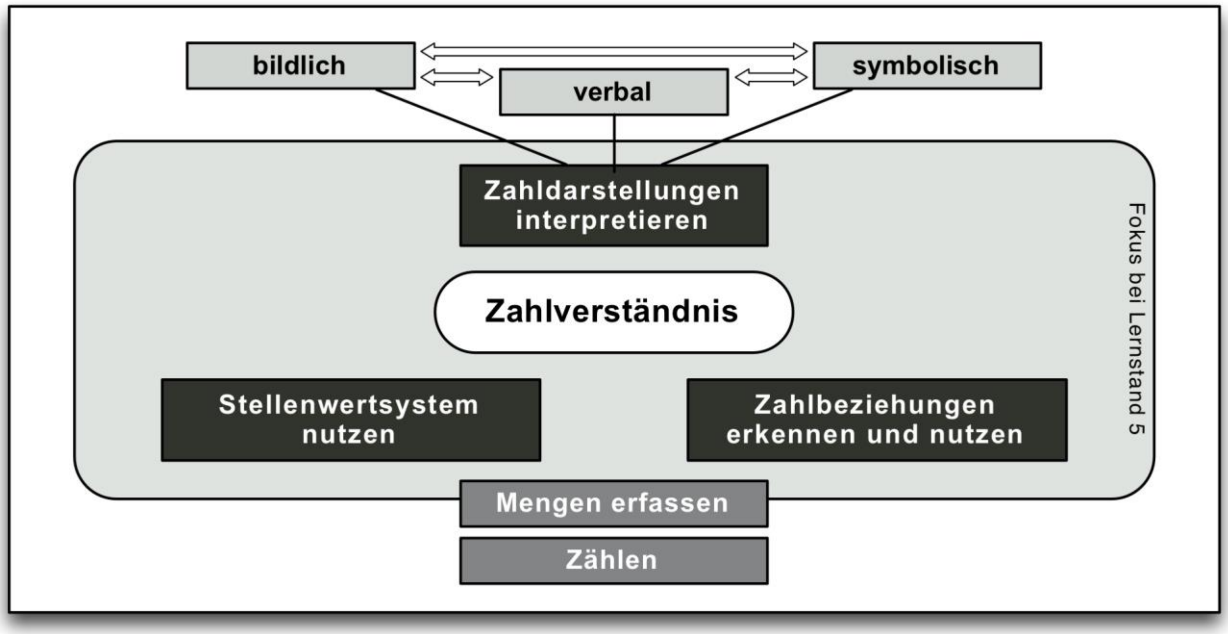
4 Zahlverständnis

Als *Zahlverständnis* wird bei Lernstand 5 die Fähigkeit von Schülerinnen und Schülern bezeichnet, mit natürlichen Zahlen in unterschiedlichen Zahldarstellungen im Millionenraum umzugehen.

Zum Zählen und Erfassen von Mengen müssen Schülerinnen und Schüler zunächst von grundlegenden Zahlaspekten Gebrauch machen. Dabei verwenden sie Zahlen zum Zählen und Ordnen („zehn, elf, zwölf", „der dritte Platz" – Ordinalzahlaspekt) und zum Beschreiben von Mengen durch Zusammenfügen und Zerlegen („7 kann sich aus 5 und 2 zusammensetzen, aber auch aus 4 und 3" – Kardinalzahlaspekt). Dies nutzen sie beim Kopfrechnen, beim halbschriftlichen oder schriftlichen Rechnen („das Zehnfache von 2 ist 20", „125 + 37 = 162" – Rechenzahlaspekt).

Aufbauend auf diesen unterschiedlichen Zahlaspekten entwickeln sich drei miteinander verbundene Bereiche des Zahlverständnisses, die bei Lernstand 5 im Fokus stehen: das flexible Nutzen des Stellenwertsystems, das Erkennen und Nutzen von Zahlbeziehungen und das Interpretieren verschiedener Zahldarstellungen.

Die nachfolgende Grafik verdeutlicht noch einmal die unterschiedlichen Bereiche des Zahlverständnisses:



Zahldarstellungen interpretieren. Schülerinnen und Schüler wechseln flexibel zwischen verschiedenen Zahldarstellungen und veranschaulichen Zahlen und Rechnungen. Verwendung finden bildliche Zahldarstellungen (z. B. Hunderterquadrate, Zehnerstangen und Einerwürfel, Zahlenstrahl) sowie unterschiedliche symbolische Darstellungen (z. B. Stellenwerttafel, auch mit Plättchen, Ziffernschreibweise). Bei der Übersetzung zwischen verbaler und symbolischer Darstellung müssen sie unterschiedliche Reihenfolgen der Stellenwerte beachten (z. B. 132 =„einhundertzweiunddreißig", sog. Zehnerinversion).

Das Stellenwertsystem nutzen. Schülerinnen und Schüler verstehen das Bauprinzip des dekadischen Stellenwertsystems, bei dem der Wert einer Ziffer von ihrer Stelle abhängt und systematisch in Zehnereinheiten gebündelt wird. Sie müssen diese Prinzipien beim Rechnen anwenden wie beim Bündeln oder Entbündeln einzelner oder mehrerer Stellenwerte (z. B. erfordert 2000 – 30 die Entbündelung der Tausender und Hunderter).

Zahlbeziehungen erkennen und nutzen. Schülerinnen und Schüler erkennen vielfältige Beziehungen zwischen Zahlen (z. B. Vorgänger und Nachfolger, Abstände, Zahlzerlegungen, Vielfache und Teiler, ...) und nutzen diese kreativ und flexibel für Rechenoperationen (z. B. die Nähe zu Stellenwertübergängen bei der Aufgabe 602 – 599, gleichsinniges Verändern 41 – 16 = 40 – 15). Sie nutzen additive Zahlzerlegungen (z. B. Welche der Zahlen liegt am nächsten an der 4500: 4010, 4090, 4900 oder 5010?) und multiplikative Zahlbeziehungen mit Zehnerstufen (z. B. Ergänze die Rechnung mit der richtigen Anzahl an Nullen: 10____ · 30____ = 300 000.). Mittels Vorstellungen zu Zahlgrößen können Schülerinnen und Schüler Überschlagsrechnungen und Kontrollrechnungen durchführen (z. B. 486: 5 ist kleiner als 100).

Hinweise zur Interpretation der Ergebnisrückmeldung: Lernstandsstufen Zahlverständnis

Lernstand 5 erfasst das Zahlverständnis der Schülerinnen und Schüler auf drei Lernstandsstufen. Aufgrund des unterschiedlichen Förderbedarfs wird die mittlere Stufe hierbei zusätzlich in Stufe 2a und 2b ausdifferenziert. Die Lernstandsstufen zum Zahlverständnis werden nachfolgend näher erläutert. Hierbei gilt es zu berücksichtigen, dass die Stufenbeschreibungen jeweils die charakteristischen Merkmale dieser Stufe hervorheben, es sich hierbei jedoch um keine umfassende Zusammenstellung aller Kompetenzen auf der Stufe handeln kann.

Schülerinnen und Schüler, die einer bestimmten Stufe zugeordnet werden, befinden sich auf dem Weg zur Erreichung der stufenspezifischen Kompetenzen, bezüglich mancher Teilaspekte der Stufe sind sie jedoch noch unsicher. Eine anschließende Förderung sollte demnach die Anforderungen der Stufe aufgreifen, auf der die jeweiligen Schülerinnen und Schüler stehen, und so die zugehörigen Kompetenzen festigen und erweitern (s. Spalte „Förderhinweis“). In Bezug auf die beschriebenen Kompetenzen der darunter liegenden Stufen verfügen die Schülerinnen und Schüler hingegen bereits über eine hohe Sicherheit.

Stufe	Lernstand	Förderhinweis
1	**Mit einzelnen Stellenwerten umgehen** Schülerinnen und Schüler können bei Zahldarstellungen einzelne Stellenwerte identifizieren und diese in eine andere Zahldarstellung übertragen. Jeder Stellenwert wird dabei jeweils isoliert bearbeitet, es treten keine Stellenwertübergänge auf, die ein Bündeln bzw. Entbündeln notwendig machen. Beispielsweise können Schülerinnen und Schüler Übersetzungen zwischen bildlichen Zahldarstellungen, unterschiedlichen symbolischen Darstellungen und der Zifferndarstellung vornehmen. Zahlen im Tausenderraum können sie in Zahlwörter übertragen und am Zahlenstrahl durch einfache Verfeinerung der Skalierung verorten. Die Zahlen bewegen sich überwiegend im niedrigen (bis fünfstelligen) Zahlenraum oder enthalten nur einzelne nicht besetzte Stellen bzw. Nullen.	Unsicherheiten beim Verständnis von Stellenwerten können z. B. mithilfe von „Mathe sicher können“ [17] bearbeitet werden. Zunächst wird hierzu eine vertiefende Diagnose mithilfe der Standortbestimmungen in „N1A – Ich kann Zahlen mit Material lesen und darstellen“ empfohlen. Hieran anschließen können sich gegebenenfalls die bei Stufe 2a genannten Standortbestimmungen N1B sowie N2A – N2C. Die „Mathe sicher können“-Materialien haben sich zur zielgerichteten Förderung in Kleingruppenarbeit bewährt, sind aber auch im Klassenunterricht oder in der Einzelförderung nutzbar (Selter et al., 2014, S. 7).
2a	**Beziehungen zwischen Stellenwerten erkennen und nutzen** Schülerinnen und Schüler können Stellenwerte in Beziehung zueinander betrachten, beispielsweise beim Zerlegen, Zusammenfügen oder Vergleichen von Zahlen und einzelne Stellenwertübergänge berücksichtigen. So können sie bei Übersetzungen zwischen unterschiedlichen Zahldarstellungen Stellen zunächst ordnen und mehrere nicht besetzte Stellen berücksichtigen. Sie können Zahlwörter in Zahlen übersetzen und hierbei die Zehnerinversion berücksichtigen. Schülerinnen und Schüler können ihr Verständnis des Stellenwertsystems nutzen, um Zahlen schrittweise zu erhöhen oder verkleinern (z. B. in Tausenderschritten mit Zehntausenderübergang) und hierbei einfache Bündelungen bzw. Entbündelungen vornehmen. Sie können Zahlbeziehungen erkennen und Zahlen additiv zerlegen, wenn sie z. B. im Tausenderraum Abstände und Differenzen zwischen Zahlen vergleichen.	Der sichere Umgang mit Stellenwerten (insbesondere Bündeln bzw. Entbündeln) kann weiter gefestigt werden. Hierzu können teilweise Materialien von „Mathe sicher können“ (Selter et al., 2014) eingesetzt werden, beispielsweise ausgehend von einer vertiefenden Diagnose mithilfe der Standortbestimmungen in „N1B – Ich kann bündeln und entbündeln“ sowie in „N2A – Ich kann Zahlen am Zahlenstrahl lesen und darstellen“, „N2B – Ich kann Zahlen miteinander vergleichen und der Größe nach ordnen“, „N2C – Ich kann zu Zahlen Nachbarzahlen angeben und in Schritten zählen“. Die „Mathe sicher können“-Materialien haben sich zur zielgerichteten Förderung in Kleingruppenarbeit bewährt, sind aber auch im Klassenunterricht oder in der Einzelförderung nutzbar (Selter et al., 2014, S. 7).

Stufe	Lernstand	Förderhinweis
2b	**Komplexe Beziehungen zwischen Stellenwerten berücksichtigen und Vorstellungen zu Zahlgrößen nutzen** Schülerinnen und Schüler können in unterschiedlichen Zahldarstellungen mit mehreren Stellenwerten zugleich umgehen und dabei mehrere Eigenschaften von Zahlen (z. B. Zahlgröße, Anzahl von Stellen) in den Blick nehmen oder mehrfach Bündelungen oder Entbündelungen vornehmen. So operieren sie beim Arbeiten mit unterschiedlichen Zahldarstellungen flexibel mit verschiedenen Bündelungen (z. B. 16 Zehner, 60 Hunderter) und greifen dabei auf ihr Verständnis des Stellenwertsystems zurück. Schülerinnen und Schüler können Produkte aus Stufenzahlen (mit einer oder mehreren Endnullen) vergleichen bzw. vervollständigen und dabei einfache multiplikative Zerlegungen der Zahlen erkennen bzw. vornehmen. Vorstellungen zu Zahlgrößen können genutzt werden, um die Wirkung einfacher Rechenoperationen (z. B. Tausenderzahl durch Einerzahl oder Division durch Stufenzahlen) auf die Stellenzahl des Ergebnisses abzuschätzen.	Sicherheit und Flexibilität im Umgang mit dem Stellenwertsystem sowie in Bezug auf Vorstellungen zu Zahlgrößen können weiter ausgebaut werden. Geeignete Aufgaben (z. B. in Form von Rechenkonferenzen) können beispielsweise dem „Handbuch für den Mathematikunterricht. 4. Schuljahr“ (Schipper, Dröge & Ebeling, 2000, S. 72ff.) entnommen werden.
3	**Zahlen bei komplexen und problemhaltigen Situationen verstehen und flexibel mit Zahlen umgehen** Schülerinnen und Schüler können bei problemhaltigen Situationen mit Stellenwerten mehrschrittig und flexibel mit Zahlen umgehen und das Zahlverständnis zur Abschätzung komplexer Rechenoperationen nutzen. Sie können komplexe Problemstellungen bewältigen, bei denen mehrere Zahleigenschaften (z. B. Zahlgröße, Anzahl von Stellen, Teilbarkeit) systematisch analysiert werden müssen, auch bei gleichzeitigem Wechsel zwischen unterschiedlichen Zahldarstellungen. Schülerinnen und Schüler können Wirkungen von Rechenoperationen losgelöst von konkreten Zahlen abschätzen und Zahlbeziehungen für Rechenvorteile nutzen (z. B. durch gleichsinniges Verändern). Sie können Rechenergebnisse auch im hohen Zahlenraum überschlagen.	Geschicktes Rechnen und anspruchsvolles Überschlagen können weiter ausgebaut werden, beispielsweise mit sogenannten „Fermi-Aufgaben“ (z. B. beim Projekt PIKAS[5]).

[5] http://pikas.dzlm.de/upload/Material/Haus_7_-_Gute_-_Aufgaben/IM/Informationstexte/H7_IM_Fermi-Aufgaben.pdf

Illustration des Stufenmodells zum Zahlverständnis

Die nachfolgende Grafik dient der Illustration zentraler Anforderungen der Stufen anhand von beispielhaften Testaufgaben.

3

Stufe 3:
Zahlen bei komplexen und problemhaltigen Situationen verstehen und flexibel mit Zahlen umgehen

HT	ZT	T	H	Z	E

Lege 10 Plättchen in die Stellenwerttafel.
Schreibe die kleinste 6-stellige Zahl auf, die du legen kannst.

____

Beispiel: Mehrere Zahleigenschaften berücksichtigen in Kombination mit Darstellungswechsel

- Zahl muss unter gleichzeitiger Beachtung von Bedingungen bzgl. möglicher Ziffern, Zahlgröße, Stellenzahl gebildet werden
- Ergebnis muss in Zahl übersetzt werden
- flexibles Operieren mit Stellenwerten und systematische Analyse von Zahleigenschaften erforderlich

2b

Stufe 2b:
Komplexe Beziehungen zwischen Stellenwerten berücksichtigen und Vorstellungen zu Zahlgrößen nutzen

T	H	Z	E

Welche Zahl entsteht, wenn man ein Plättchen von Z nach H verschiebt?

☐ 10 089 ☐ 91 089 ☐ 10 989 ☐ 91 989

Beispiel: Veränderung in Stellenwerttafel als Rechenoperation interpretieren

- beide Effekte der Rechenoperation müssen erkannt werden (-10 + 100)
- Ergebnis der Rechenoperation muss in Zahl übersetzt werden
- zwei Bündelungsschritte müssen vorgenommen werden (H und T)

2a

Stufe 2a:
Beziehungen zwischen Stellenwerten erkennen und nutzen

Starte mit der Zahl 62 190.
Zähle in Tausenderschritten rückwärts.
Welches sind dann die nächsten drei Zahlen?

62 190 __________ __________ __________

Beispiel: Zahlen schrittweise rückwärts verkleinern

- Schrittweises Verkleinern in Tausenderschritten erfordert gleichzeitige Beachtung von Tausender- und Zehntausenderstelle der vorgegebenen Zahl
- ein Entbündelungsschritt muss vorgenommen werden (ZT)

1

Stufe 1:
Mit einzelnen Stellenwerten umgehen

Zeichne wie im Beispiel das passende Bild zur angegebenen Zahl.

	Zahl	Bild
Beispiel:	421	
	352	

Beispiel: Übersetzung Zifferndarstellung in bildliche Zahldarstellung

- jeder einzelne Stellenwert der vorgegebenen Zahl kann bei der Übersetzung in die bildliche Darstellung isoliert bearbeitet werden
- niedriger, dreistelliger Zahlenraum, keine unbesetzten Stellen zu beachten

5 Literatur

Gerster, H.-D. (2012). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren: Diagnose und Therapie.* Münster: WTM.

Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Kl. 10: Quantitative und qualitative Analysen.* Berlin: Köster.

KMK (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgang 4). München: Wolters Kluwer. Abgerufen von https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf

Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern u. a.: Haupt.

Padberg, F. & Benz, C. (2011). *Didaktik der Arithmetik: Für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1999). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 3. Schuljahr.* Hannover: Schroedel.

Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (2000). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 4. Schuljahr.* Hannover: Schroedel.

Schulz, A. & Leuders, T. (2014). Entwicklung und Validierung eines kognitiven Diagnosemodells zur Eingangsdiagnose und -förderung in Klasse 5 - Teilmodell zu schriftlichen Rechenverfahren. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1115-1118). Münster: WTM-Verlag.

Schulz, A. & Leuders, T. (2015). Fehlerfrei schriftlich Rechnen. Was kann man am Beginn von Klasse 5 tun? *Mathematik lehren, 191*, 9-12.

Schulz, A., Leuders, T. & Rangel, U. (2017). Arithmetische Basiskompetenzen am Übergang zu Klasse 5 – eine empirie- und modellgestützte Diagnostik als Grundlage für spezifische Förderentscheidungen. In A. Fritz, S. Schmidt & G. Ricken (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (3. Aufl., S. 396-417). Weinheim: Beltz.

Selter, Ch., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, St. (Hrsg.) (2014). *Mathe sicher können – Natürliche Zahlen. Förderbausteine und Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen.* Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. & Müller G. (1999). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* Stuttgart [u. a.]: Klett-Schulbuchverlag.