

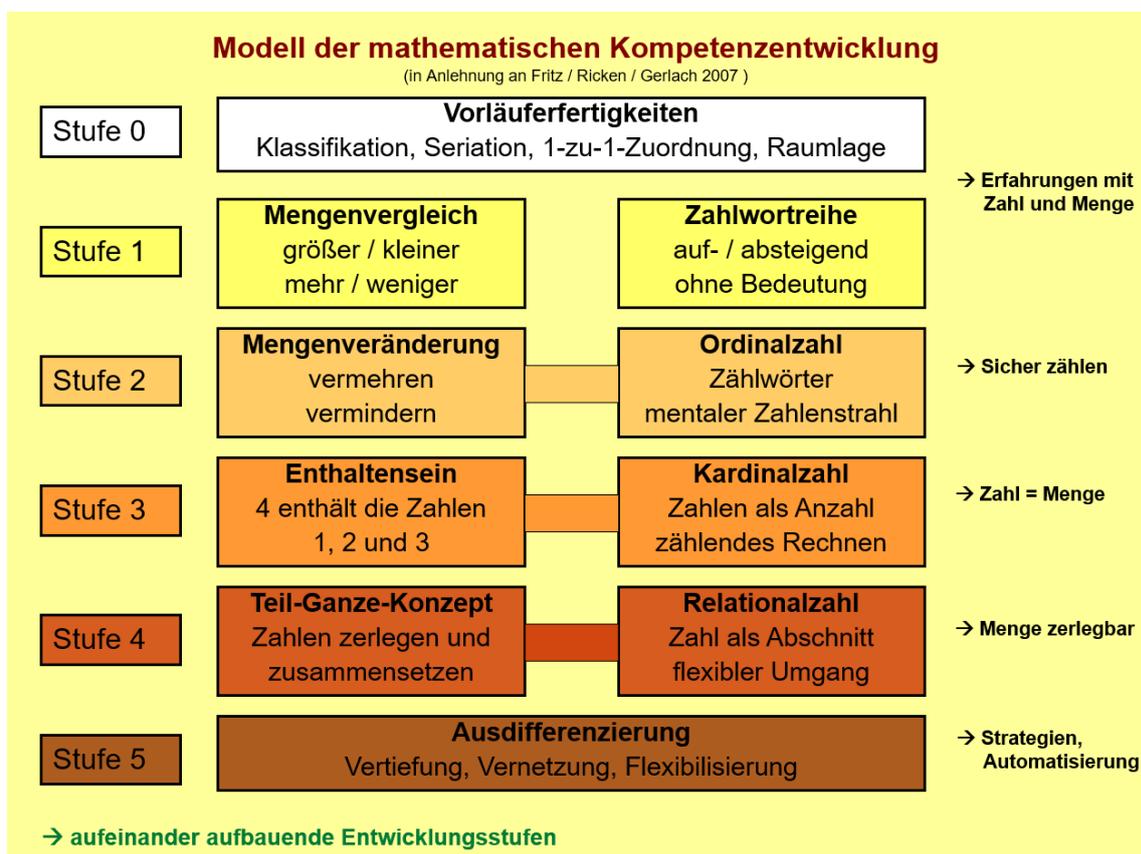
Fachdidaktische Erläuterungen zu den arithmetischen Basiskompetenzen Mathematik KI.1-4

Das Hauptproblem von Schülerinnen und Schülern mit Rechenschwierigkeiten liegt darin begründet, dass grundlegende arithmetische Basiskompetenzen nicht entwickelt wurden. Infolgedessen entstehen mit fortschreitendem Unterricht Verständnislücken, die kaum mehr kompensiert werden können. Jede Mathematiklehrkraft benötigt daher ein fundiertes fachliches Lehrerwissen, um einen qualitativ hochwertigen Unterricht zu gestalten und frühzeitig auf Verständnisschwierigkeiten der Schüler zu reagieren.

Was sind arithmetische Basiskompetenzen?

1. Entwicklung arithmetischer Basiskompetenzen in Klasse 1

Zentrale arithmetische Vorstellungskonzepte entwickeln sich bereits in Klasse 1. Sie lassen sich in Anlehnung an die Autoren Fritz/Ricken/Gerlach¹ folgendermaßen darstellen:



Das mathematische Kompetenzmodell stellt den komplexen Entwicklungsprozess eines Kindes beim Rechnenlernen dar. Auf dieser Grundlage können Entwicklungsstände von Kindern erfasst und nächste Entwicklungsschritte geplant werden.

¹ Fritz, Annemarie, Ricken, Gabi, Gerlach, Maria: Kalkulie. Diagnose- und Trainingsprogramm für rechenschwache Kinder. Handreichung zur Durchführung der Diagnose. Cornelsen 2007

Erläuterungen zum Modell:

Der Mensch verfügt über zwei angeborene kognitive Schemata, die das Rechnen lernen vorbereiten:

1. Digital-sequenzielles Schema, welches die Grundlage für den Erwerb der Zahlwortreihe bildet.
2. Räumlich-analoges Schema, welches die Grundlage für den sich entwickelnden Mengenbegriff bildet.

Die Entwicklung beider Schemata kann bereits im Vorschulalter positiv beeinflusst werden, z.B. durch Spiele und Übungen mit Mengen und logischen Reihen. Zum Einschulungszeitpunkt sollten die Kinder eine Vorstellung von Mengen bis zu 6 Elementen entwickelt haben und die Zahlwortreihe bis 10 sicher aufsagen können. Im Verlauf des ersten Schuljahres geht es in erster Linie um die Integration dieser beiden Kompetenzen: Das Kind muss verstehen, dass die Zahl 6 sowohl für die Position 6 in der Zahlwortreihe steht (ordinaler Zahlbegriff) als auch für die Mächtigkeit einer Menge mit 6 Elementen (kardinaler Zahlbegriff). Eine fundierte kardinale Zahlvorstellung ist die entscheidende Voraussetzung für die Entwicklung flexibler nicht-zählender Rechenstrategien.

Erläuterungen zu den einzelnen Entwicklungsschritten:

- Stufe 0: Das Kind kann Dinge sortieren, vergleichen, logische Reihen fortsetzen und sich sicher im Raum bewegen
- Stufe 1: Das Kind nutzt die Relationsbegriffe "mehr", "weniger", "größer", "kleiner" und kann die Zahlwortreihe aufsagen
- Stufe 2: Das Kind nutzt die Zahlwortreihe, um eine Menge sicher in ordinalem Sinne "auszuzählen"
- Stufe 3: Das Kind versteht, dass eine Zahl für eine Menge steht (Anzahl-Konzept)
- Stufe 4: Das Kind versteht, dass eine Menge beliebig zerlegt und wieder zusammengesetzt werden kann (Teil-Ganze-Konzept)
- Stufe 5: Das Kind nutzt sein Verständnis vom Zerlegen für die Entwicklung flexibler Rechenstrategien

Ein 40-minütiger Fachvortrag zum Modell der mathematischen Kompetenzentwicklung mit ausführlichen Erläuterungen und Beispielen zu den einzelnen Entwicklungsstufen sowie Hinweisen für den Unterricht ist unter folgendem Link abrufbar:

<https://youtu.be/dxdIKRyJcA8>

2. Arithmetische Basiskompetenzen bis Klasse 10

Im Folgenden werden in Anlehnung an M. Humbach² sechs zentrale Basiskompetenzen dargestellt, die grundlegend für ein mathematisches Verständnis im Bereich der Arithmetik sind. Zentrale Vorstellungskonzepte aus Klasse 1 werden gefestigt und im immer größer werdenden Zahlenraum ausdifferenziert. Wichtig für den Lernprozess ist dabei, dass die einzelnen Basiskompetenzen nicht isoliert voneinander betrachtet werden, sondern in ihrer Vernetzung. So kann ein Kind beispielsweise nur dann sicher zählen, wenn es erste Einsichten in die Struktur unseres dezimalen Stellenwertsystems gewonnen hat. Auf Grund dessen kommt es in der Darstellung der Kompetenzen teilweise zu Überlappungen.

Arithmetische Basiskompetenzen bis KI.10

(in Anlehnung an Martina Humbach)

Ordinaler und kardinaler Zahlbegriff

Der Schüler kann sich sicher im vorgegebenen Zahlenraum orientieren und hat ein Verständnis für Mengen und Teilmengen entwickelt.

Stellenwertverständnis

Der Schüler hat die strukturelle Regelhaftigkeit unseres dezimalen Stellenwertsystems verstanden.

Operationsverständnis

Der Schüler hat ein konzeptuelles Verständnis für die vier Grundrechenarten entwickelt.

Rechenstrategien

Der Schüler hat sich vom zählenden Rechnen gelöst und flexible kardinale Rechenstrategien entwickelt.

Automatisierung von Grundaufgaben

Der Schüler hat Grundaufgaben automatisiert, insbesondere die Aufgaben des kleinen $1+1$ und 1×1 .

→ vernetzte Sichtweise

² Humbach, Martina: Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Verlag Dr. Köster 2008.

Erläuterungen zu den einzelnen Basiskompetenzen:

Ordinaler Zahlbegriff

Das Kind muss die Zahlwortreihe sicher beherrschen und auf dieser Grundlage eine Menge abzählen können.

Kompetenzstufen der Zählentwicklung:

- Stufe 1: Korrekte Kenntnis der Zahlwortreihe als Wortfolge
- Stufe 2: Gebrauch der Zahlwortreihe zum Abzählen von Objekten
- Stufe 3: Einsicht in die kardinale Bedeutung des Zählens

Konstruktionsprozess der (teilweise unlogischen) deutschen Zahlsyntax:

- die Zahlen von 1 bis 12 müssen auswendig gelernt werden, ebenso die Zahl 20
- von 13 bis 19, 21 bis 29 usw. kann konstruiert werden, Sprech- und Schreibrichtung stimmen aber nicht überein
- ab 100 erfolgt beim Sprechen ein weiterer Richtungswechsel
- ab 21 muss zusätzlich die Silbe „und“ eingefügt werden

Gedankenspiel: Systematischer Aufbau der Zahlwortreihe: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, einzig, einzig-eins, einzig-zwei, einzig-drei, ... zweizig, zweizig-eins usw.

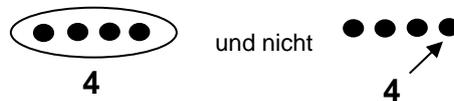
Kardinaler Zahlbegriff

Das Kind muss verstehen, dass eine Zahl nicht nur die Position in der Zahlwortreihe angibt, sondern für die **Anzahl** der in ihr enthaltenen Elemente steht (Zahl = Menge).

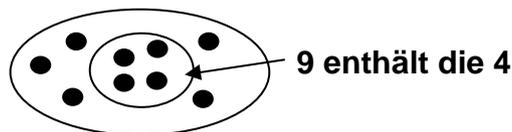
Diese Menge kann beliebig zerlegt und wieder zusammengesetzt werden, ohne dass sich ihre Mächtigkeit verändert (Teil-Ganze-Konzept).

Kompetenzstufen auf dem Weg zum Teil-Ganze-Konzept

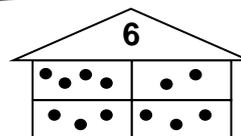
- Stufe 1: Das Kind versteht, dass eine Zahl für die Anzahl der Elemente steht.



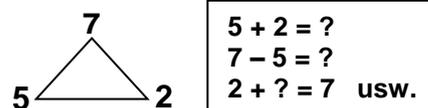
- Stufe 2: Das Kind entwickelt ein erstes Verständnis für Teilmengen.



- Stufe 3: Das Kind versteht, dass Zahlen zerlegbar und aus Teilen zusammensetzbar sind.



- Stufe 4: Das Kind durchschaut die operative Struktur der „Zahlentripel“.



Stellenwertverständnis

Das Kind muss auf der Grundlage seines kardinalen Zahlbegriffs die strukturelle Regelmäßigkeit unseres dezimalen Stellenwertsystems begreifen.

Grundprinzipien unseres dezimalen Stellenwertsystems:

- **Stellenwertprinzip:** Die Quantität, die eine einzelne Ziffer innerhalb einer mehrstellig dargestellten Zahl repräsentiert, wird durch ihre Position (Stelle) bestimmt.
- **Bündelungsprinzip:** Die Bündelung basiert auf der Grundzahl 10, wobei die Werte der Stellen von rechts nach links um Zehnerpotenzen ansteigen.
- **Additives Prinzip:** Die Quantität einer Zahl entspricht der Summe der Werte, die durch ihre Stellen dargestellt werden: $372 = 300 + 70 + 2$
- **Multiplikatives Prinzip:** Zusätzlich zu ihrem Stellenwert bezeichnet der Eigenwert einer Stelle, wie viele Bündel mit dieser Mächtigkeit vorhanden sind: „7“ innerhalb der Zahl „372“ steht für 7 Zehnerbündel.

Die Entwicklung des Stellenwertverständnisses:

- Stufe 1: Eine zweistellige Zahl wird als Ganzes betrachtet, d.h. die beiden Ziffern stellen ein Symbol für eine große Anzahl dar, die Strukturierung wird noch nicht erkannt.
- Stufe 2: Das Kind erkennt die unterschiedliche Bedeutung der Ziffern, links stehen die Zehner und rechts die Einer. Das Kind urteilt auf Grund der Position, erkennt aber noch nicht die Quantität.
- Stufe 3: Das Kind versteht, dass jede Ziffer einen bestimmten Wert repräsentiert, es versteht aber noch nicht die Zusammenhänge (z.B. 1 Zehner = 10 Einer; Zahl auf der Zehnerstelle = Vielfaches von 10).
- Stufe 4: Beginnende (unsichere) Einsicht in das Stellenwertprinzip (linke Zahl = Anzahl der Zehner, rechte Zahl = Anzahl der restlichen Einer).
- Stufe 5: Sicheres Stellenwertverständnis: Das Kind erkennt, dass die einzelnen Ziffern einer Zahl die Zerlegung einer Menge in Zehnerbündel und lose Einer repräsentiert.



Viele Kinder verfügen über ein oberflächliches Wissen, mit dessen Hilfe sie viele Aufgaben lösen. Ein tiefes konzeptuelles Verständnis fehlt häufig noch über die Grundschule hinaus.

Operationsverständnis im Sinne des Teil-Ganze-Konzepts

Definition „Operationsverständnis“: Inhaltliche Vorstellung der vier Rechenoperationen

Das Kind muss die vier Rechenoperationen im Sinne des Teil-Ganze-Konzepts verstehen (und nicht rein ordinal im Sinne des Hinzufügens und Wegnehmens).

- Addition: Zusammenfassung der Teile zu einem Ganzen
- Subtraktion: Abgrenzen eines Teils vom Ganzen
- Multiplikation: Zusammenfassung mehrerer gleich großer Teile zu einem Ganzen
- Division: Zerlegung eines Ganzen in mehrere gleich große Teile

Ebenen der Begriffsbildung:

- konkreter Vollzug der Handlung
- bildliche Darstellung
- symbolische Darstellung über Ziffern und Sprache
- Automatisierung

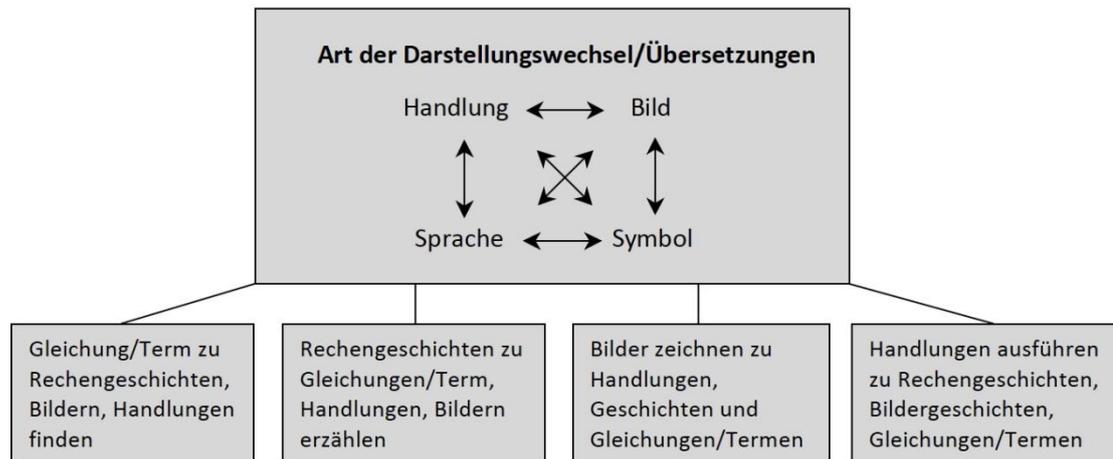


Abbildung entnommen aus: Kaufmann & Wessolowski 2006, S. 25

Aufbau flexibler Rechenstrategien

Das Kind muss sich vom zählenden Rechnen lösen und auf der Grundlage des Teil-Ganze-Konzepts und des Stellenwertverständnisses flexible Rechenstrategien entwickeln.

Die Entwicklung von Rechenstrategien:

- Stufe 1: Vollständiges Auszählen, jeweils beginnend mit 1
- Stufe 2: Weiterzählen vom ersten Summanden aus (Grundlage: Einsicht in Kardinalität)
- Stufe 3: Weiterzählen vom größeren Summanden (Grundlage: Einsicht in Kommutativität, oft intuitiv)
- Stufe 4: Entwicklung vorteilhafter Rechenstrategien (Grundlage: Einsicht ins Teil-Ganze-Konzept)

Effektivere Strategien setzen stets das entsprechende konzeptuelle Wissen voraus! Eine externe Vermittlung von Strategien birgt die Gefahr, dass die Kinder Oberflächenregeln konstruieren und diese mechanisch und unverstanden anwenden!

Didaktische Hinweise:

1. Zunächst muss festgestellt werden, ob das Kind über das der Strategie zugrundeliegende Wissen verfügt.
2. Um die Entdeckung einer bestimmten Strategie zu aktivieren, sollte das Kind dann mit entsprechenden Aufgaben konfrontiert werden.
3. Ist eine effizientere Strategie entdeckt, sollten verschiedene Vorgehensweisen im Gespräch verglichen und ihre Vorteile abgewägt werden.
4. Schließlich muss dafür gesorgt werden, dass die neue Strategie auch angewendet wird.



Kinder trennen sich ungern von alten vertrauten Strategien. Deshalb sollte der Lehrer die Anwendung der gewünschten Strategie durch besonderes Lob bestärken.

Tausch- aufgabe	Verdoppeln	Zwergen- aufgabe	Stopp bei 10	Nachbar- aufgabe	Zehner-Einer	Schrittweise
						
$\begin{array}{r} 3 + 12 = \\ 12 + 3 = 15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 + 8 = \\ 7 + 7 = 14 \\ 14 + 1 = 15 \end{array}$	$\begin{array}{r} 42 + 6 = \\ 2 + 6 = 8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 + 8 = \\ 5 + 5 = 10 \\ 10 + 3 = 13 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 + 6 = \\ 10 + 6 = 16 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 + 28 = \\ 30 + 20 = 50 \\ 6 + 8 = 14 \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 + 18 = \\ 45 + 10 = 55 \\ 55 + 8 = 63 \end{array}$

Darstellung aus: www.mathe-flip.de

Automatisierung von Grundaufgaben

Die sichere Beherrschung der Grundaufgaben ist eine wichtige Voraussetzung für das Rechnen in größeren Zahlenräumen und komplexeren Zusammenhängen. Sie entlastet das Gedächtnis und ermöglicht die Konzentration auf neue Inhalte.



Erst wenn die Kinder eine sichere Vorstellung von Zahlen und Rechenoperationen über Handlung und Anschauung entwickelt haben, sollte mit der Automatisierung begonnen werden. Im Vordergrund steht immer zunächst das Verstehen!

Folgende Grundaufgaben sollten im Laufe der ersten drei Schuljahre nach und nach vollständig automatisiert werden:

Bereich Einspluseins:

- „Verliebte Zahlen“
- Verdopplungsaufgaben
- alle Plusaufgaben bis 20

Bereich Einmaleins:

- Königsaufgaben
- Quadratzahlaufgaben
- alle Malaufgaben des kleinen 1x1

Literaturempfehlung zum Vertiefen und Weiterlesen:

Elisabth Ratgeb-Schnierer / Charlotte Rechtsteiner: Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Springer Spektrum 2018

Sebastian Wartha / Josias Hörhold / Matthias Kaltenbach / Sebastian Schu: Grundvorstellungen aufbauen - Rechenprobleme überwinden. Westermann 2019